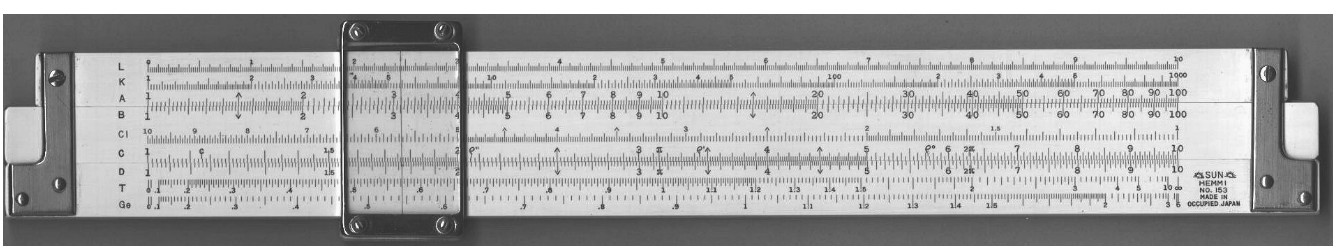
Particularidades de la regla de cálculo Hemmi 153

Texto de Carlos Gracia-Lázaro para ARC.

Disposición y definición de las escalas

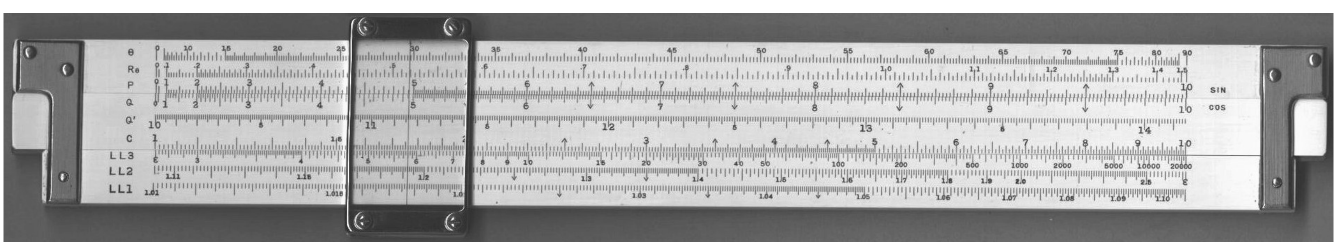
Anverso

- Parte superior del cuerpo:
    - L: Escala constante, rango [0, 10]. Proporciona diez veces el logaritmo decimal del valor en la escala D.
    - K: Escala logarítmica, [1, 1000]. Proporciona el cubo del valor en la escala D.
    - A: Escala logarítmica, [1, 100]. Proporciona el cuadrado del valor en la escala D.
- Reglilla:
    - B: Escala logarítmica idéntica a A, [1, 100].
    - CI: Escala básica recíproca de C, decreciente, [1, 10]. Proporciona diez veces el inverso al valor en C.
    - C: Escala logarítmica idéntica a D, [1, 10].
- Parte inferior del cuerpo:
    - D: Escala logarítmica básica, [1, 10]. En las escalas logarítmicas, la distancia al índice 1 a la que se ubica cada valor es proporcional a su logaritmo.
    - T: Escala de tangentes, [0, ∞]. Proporciona la tangente del valor en las escalas θ y R_θ.
    - G_θ: Escala de Gudermann, [0,6]. Proporciona el inverso de la función de Gudermann del valor en la escala R_θ.



Reverso

- Parte superior del cuerpo:
    - θ: Escala en grados, [0, 90]. Proporciona el arcoseno, en grados, de los valores en la escala P divididos por 10.
    - R_θ: Escala en radianes, [0, $\pi/2$]. Proporciona el arcoseno, en radianes, de los valores en la escala P divididos por 10.
    - P: Escala cuadrática, [0, 10]. En las escalas cuadráticas, la distancia al cero a la que se ubica un valor es proporcional a su cuadrado.
- Reglilla:
    - Q: Escala cuadrática idéntica a P, [0, 10].
    - Q': Escala cuadrática prolongación de la escala Q, [10, $10\sqrt{2}$].
    - C: Escala logarítmica básica idéntica a D, [1, 10].
- Parte inferior del cuerpo:
    - LL3: Escala log-log, [e, e^{10}]. Proporciona la función exponencial e^x del valor en la escala D. En las escalas log-log, la distancia al origen a la que se ubica un valor es una función lineal del logaritmo de su logaritmo.
    - LL2: Escala log-log prolongación de la escala LL3, [$e^{0.1}$,e]. Proporciona $e^{0.1x}$, esto es, la función exponencial de la décima parte del valor en la escala D.
    - LL1: Escala log-log prolongación de la escala LL2, [$e^{0.01}$,$e^{0.1}$]. Proporciona $e^{0.01x}$, esto es, la función exponencial de la centésima parte del valor en la escala D.



Uso de las escalas poco habituales

La Hemmi 153 es un regla de cálculo de uso general científico e ingenieril que permite realizar multitud de operaciones con solo 18 escalas, optimizando la relación entre la capacidad de cálculo y el número de escalas. En esta sección se describen las escalas poco habituales en otras reglas.

Escalas trigonométricas especiales

<u>Tangente</u>

La escala T proporciona la tangente de un ángulo dado. Este ángulo se puede leer directamente tanto en grados, en la escala θ, como en radianes en la escala R_θ. Para calcular la tangente de un ángulo de α radianes, coloque la línea del cursor sobre el valor α en la escala R_θ, la línea del cursor marcará tan(α) sobre la escala T. Para calcular la tangente de un ángulo de β grados sexagesimales, sitúe la línea del cursor sobre el valor β en la escala θ, la línea del cursor marcará tan(β) sobre la escala T.

Inversamente, las escalas R_θ y θ proporcionan la arcotangente de los valores en la escala T. Para calcular la arcotangente en radianes de un valor x, coloque la línea del cursor sobre el valor x en la escala T, la línea del cursor marcará arctan(x) sobre la escala R_θ. Si desea el valor del ángulo en grados sexagesimales, esta última lectura se realiza sobre la escala θ.

<u>Seno</u>

Para calcular el seno de un ángulo de β grados sexagesimales, coloque la línea del cursor sobre el valor β en la escala θ, la línea del cursor sobre la escala P marcará 10sen(β). Para calcular el seno de un ángulo de α radianes, coloque la línea del cursor sobre el valor α en la escala R_θ, la línea del cursor marcará 10sen(α) sobre la escala P.

Inversamente, las escalas R_θ y θ proporcionan el arcoseno de los valores en la escala P. Para calcular el arcoseno en radianes de un valor x, coloque la línea del cursor sobre el valor 10x en la escala P, la línea del cursor marcará arcsen(x) sobre la escala R_θ. Si desea el valor del ángulo en grados sexagesimales, esta última lectura se realiza sobre la escala θ.

<u>Coseno</u>

Para calcular el coseno de un ángulo de β grados sexagesimales, coloque la línea del cursor sobre el valor β en la escala θ. A continuación, desplace la reglilla hasta hacer coincidir la línea del cursor con el índice 10 de la escala Q. El valor 10cos(β) se leerá sobre la escala Q en el punto marcado por el índice 0 de la escala P.

Para calcular el coseno de un ángulo de α radianes, coloque la línea del cursor sobre el valor α en la escala R_θ, a continuación, desplace la reglilla hasta hacer coincidir la línea del cursor con el índice 10 de la escala Q. El valor 10cos(α) se leerá sobre la escala Q en el punto marcado por el índice 0 de la escala P.

Inversamente, las escalas R_θ, θ y P proporcionan el arcocoseno de los valores en la escala Q. Para calcular el arcoseno en radianes de un valor x, desplace la reglilla hasta hacer coincidir el valor 10x en la escala Q con el índice 0 de la escala P. Sitúe la línea del cursor sobre el índice 10 de la escala Q. La línea del cursor marcará el valor de arccos(x) sobre la escala R_θ. Si desea el valor del ángulo en grados sexagesimales, esta última lectura se realiza sobre la escala θ.

Conversión radianes grados

Las escalas R_θ (radianes) y θ (grados), conjuntamente, permiten pasar de radianes a grados sexagesimales y viceversa haciendo coincidir el cursor con el valor del ángulo en la escala correspondiente y leyendo la conversión en la otra escala.

Escalas cuadráticas P, Q, Q'

P, Q y Q' son escalas cuadráticas. La escala P (ubicada en el cuerpo de la regla) y la escala Q (en la reglilla) son idénticas. La escala Q' es una prolongación de la escala Q para valores mayores que 10. Estas escalas permiten calcular el valor de una hipotenusa dados los valores de los catetos, así como calcular un cateto dado el otro y la hipotenusa.

Al ser escalas cuadráticas, para calcular el valor de una hipotenusa, basta con sumar los valores de los catetos en las escalas P, Q, Q'. Esto es, se opera de forma similar a la multiplicación y división con las escalas C y D. El procedimiento detallado es el siguiente:

- Sea *c* la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, *a* la del cateto mayor y *b* la del menor: $c^2=a^2+b^2$.
- Si *a* no está comprendido en el rango [1,10], multiplique *a* y *b* por la potencia correspondiente de 10 para que esté comprendida en ese rango. Al finalizar el cálculo, deberá realizar la operación inversa al resultado obtenido para obtener el valor *c* de la hipotenusa.
- Haga coincidir el índice 0 de la escala P con el valor de *a* en la escala Q. Coloque la línea del cursor sobre el valor de *b* en la escala P. La línea del cursor marcará el valor *c* de la hipotenusa sobre la escala Q.
- Si no se pudiera realizar el anterior paso por alojarse el valor fuera de la escala Q, significaría que el valor *c* de la hipotenusa es mayor que 10. En este caso, haga coincidir el índice 10 de la escala P con el valor de a en la escala Q. Coloque la línea del cursor sobre el valor de *b* en la escala P. La línea del cursor marcará el valor *c* de la hipotenusa sobre la escala Q.

El procediminento anterior se puede realizar en sentido inverso para calcular la longitud de un cateto conociendo la del otro y la de la hipotenusa.

Estas operaciones también son válidas, por ejemplo, para calcular el módulo de un vector dadas sus componentes en una base ortonormal, para convertir coordenadas cartesianas en polares o para alternar las formas exponencial y binómica en los números complejos, entre otros muchos usos. En estos ejemplos, el módulo se calcula según el procedimiento mostrado anteriormente y el ángulo o la fase, tras dividir las componentes ortogonales con las escalas C y D, mediante su arcotangente con las escalas T y R_θ (θ).

Las escalas P y Q combinadas proporcionan la operacion $\sqrt{(1-x^2)}$, lo que permite, por ejemplo, calcular el seno de un ángulo conociendo su coseno y viceversa. Para calcular el valor de *y*, siendo $y=\sqrt{(1-x^2)}$, desplace la reglilla hasta hacer coincidir el índice 10 de la escala Q con el valor x de la escala P. El índice 0 de la escala P coincidirá con el valor de *y* sobre la escala Q.

Las escalas Q y Q' combinadas propocionan la tabla correspondiente a $y=\sqrt{(1+x^2)}$, lo que permite, por ejemplo, calcular el coseno hiperbólico de un valor conociendo su seno hiperbólico y viceversa. Para calcular el valor de *y*, siendo $y=\sqrt{(1+x^2)}$, coloque la línea del cursor sobre el valor x en la escala Q. La línea del cursor marcará el valor de *y* sobre la escala Q'.

Funciones hiperbólicas

La escala G_θ, en combinación con la escala P, proporciona la función de Gudermann gd (x), definida como:

$$gd(x)=\int_0^x \frac{1}{\cosh t}\,dt$$

o mediante cualquiera de sus formas alternativas, como por ejemplo:

gd (x) = arcsin (tanh x) = arctan (sinh x) = arccsc (coth x) = 2 arctan (tanh(x/2)) = 2 arctan (e^x) - π/2 .

Estas formas alternativas permiten calcular las funciones hiperbólicas a partir de la función de Gudermann:

tanh x = sin (gd (x)); sinh x = tan (gd (x)); cosh x = sec (gd (x)),

relaciones que permiten, a su vez, calcular las funciones hiperbólicas con las escalas G_θ, T y P de la regla. La escala G_θ permite leer directamente el seno hiperbólico en la escala T y la tangente hiperbólica en la escala P.

Tangente y seno hiperbólicos

Para calcular las funciones hiperbólicas de un valor x, u=tanh x, v=sinh x, haga coincidir la línea del cursor sobre el valor x del argumento en la escala G_θ. La línea del cursor marcará a la vez tanto el valor u de la tangente hiperbólica sobre la escala P como el valor v del seno hiperbólico sobre la escala T.

Coseno hiperbólico

Metodo 1: Apoyándonos en la fórmula $\cosh x=\sqrt{(1+\sinh^2 x)}$. Haga coincidir la línea del cursor sobre el valor x del argumento en la escala G_θ. La línea del cursor marcará el valor de *v*=sinh (x) sobre la escala T. Haga coincidir la línea del cursor sobre el valor de *v* en la escala Q. La línea del cursor marcará el valor buscado, cosh x, sobre la escala Q'.

Metodo 2: Apoyándonos en la fórmula cosh x=1/sech x. Haga coincidir la línea del cursor sobre el valor x del argumento en la escala G_θ. Desplace la reglilla hasta hacer coincidir el índice 0 de la escala Q con la línea del cursor. El índice 10 de la escala P indicará sobre la escala Q el valor *v*=sech x. Para cálcular el inverso de *v*, haga coincidir la línea del cursor sobre el valor *v* en la escala C. La línea del cursor marcará el valor buscado, cosh x, sobre la escala CI.

Más allá de las escalas

Funciones hiperbólicas

La escala G_θ es útil para calcular funciones hiperbólicas en el rango $0.1<x<3$. Fuera de este rango, se pueden utilizar las siguientes aproximaciones:

- Para $x < 0.1$: $\sinh(x) \approx x$; $\tanh(x) \approx x$; $\cosh(x) \approx 1$
- Para $x > 3$: $\sinh(x) \approx e^x/2$; $\tanh(x) \approx 1$; $\cosh(x) \approx e^x/2$

Función exponencial

Las escalas LL3, LL2 y LL1, en combinación con la escala D, permiten calcular la función exponencial e^x para valores de x en el rango [0.01,10] y el logaritmo ln x en el rango $[1.01,e^{10}]$. Además, en combinación con la escala móvil C, permiten calcular funciones exponenciales y logarítmicas de cualquier base comprendida en este último rango.

Para valores del argumento menores de 0.01 se pueden utilizar las siguientes aproximaciones:

- Para $0<x<0.01$: $e^x \approx 1+x$
- Para $1<x<1.01$: $\ln(x) \approx x-1$

Para valores negativos del exponente en la función exponencial, e^{-x}, con $x>0$, se puede utlizar la relación:

$$e^{-x}=\frac{1}{e^x}$$

Esta ecuación permite calcular funciones con exponente negativo y logaritmos de valores menores que uno combinando las escalas LL3, LL2, LL1, D, C y CI.

Ejemplo 1 (exponencial con base 1<b<0.01):

Calcular 1.0048^{67}. Haciendo uso de la aproximación $e^x \approx 1+x, (x \approx 0)$, tomamos la escala D en sustitución de una escala $e^{0.001x}$. Desplace la reglilla hasta hacer coincidir el valor 4.8 en la escala D con el índice 10 de la escala C. Haga coincidir la línea del cursor con el valor 6.7 en la escala C. La línea del cursor marcará el valor buscado sobre la escala LL2: $1.0048^{67} \approx 1.378$.

Esta aproximación se puede hacer para órdenes de magnitud menores. Partiendo del ejemplo anterior, para calcular 1.00048^{67}, se procederá de indéntica manera, leyendo el resultado en la escala LL2 para obtener $1.00048^{67} \approx 1.0327$.

Ejemplo 2 (exponencial con base menor que 1):

Una baraja tiene 100 cartas, solo una de ellas es el as de picas. Si cada vez que se extrae una carta se vuelve a reponer en la baraja, ¿cuál es la probabilidad de que, tras 100 extracciones, hayamos encontrado al menos una vez el as de picas?

La probabilidad de encontrar el as de picas en una extracción viene dada por:

$p_{(1)} = 1/100 = 0.01$,

y la probabilidad de no encontrarlo en una extracción es:

$q_{(1)} = 1-p_{(1)} = 0.99$.

La probabilidad de no encontrar la carta en al menos una extracción, tras 100 extracciones, es:

$q_{(100)} = 0.99^{100}$

Haciendo uso de la aproximación $1/x \approx 2-x$, $(x\approx1)$, obtenemos $1/0.99\approx1.01$.

Sitúe la línea del cursor sobre el valor 1.01 en la escala LL1. La línea del cursor en la escala LL3 marca el valor de $1.01^{100} \approx 2.72$. El valor de $q_{(100)} = (0.99)^{100}$ se calcula a través del inverso del anterior resultado mediante la escala recíproca CI. Coloque la línea del cursor sobre 2.72 en la escala C, la línea del cursor marcará el valor $2.72^{-1} \approx 0.368$ sobre la escala CI, obteniendo:

$q_{(100)} = (0.99)^{100} \approx 0.368$

Finalmente, la probabilidad buscada $p_{(100)}$ de encontrar el as de picas, al menos una vez, tras 100 extracciones, es:

$p_{(100)} = 1-q_{(100)} \approx 1-0.368 \approx 0.632$

Nota: en este ejemplo el número n de estracciones coincide con el de cartas, por lo que el límite para n grande tiende hacia $1-e^{-1}$. El siguiente ejemplo muestra un caso general.

Ejemplo 3 (exponencial con base menor que 1):

Calcular $0.7^{1.4}$. Haga coincidir la línea del cursor sobre 7 en la escala C, la línea del cursor mostrará el inverso sobre la escala CI: $1/7\approx1.43$. Para calcular $1.43^{1.4}$, sitúe la línea del cursor sobre el valor 1.43 en la escala LL2 y desplace la reglilla hasta hacer coincidir el índice 1 de la escala C con la línea del cursor. Desplace el cursor hasta hacer coincidir la línea del cursor en la escala C con 1.4; la línea del cursor sobre LL2 marca el valor de $1.43^{1.4} \approx1.65$. El recíproco de este valor se calcula haciendo coincidir el cursor sobre el valor 1.65 en la escala C. La línea del cursor da el resultado buscado sobre la escala CI: $0.7^{1.4}\approx0.607$.

Funciones trigonométricas

La escala P porporciona el seno y la tangente de los ángulos mayores de 0.1 radianes (~5.73°). Para ángulos menores, se pueden utilizar las siguientes aproximaciones:

- Para $\alpha < 0.1$: $\sin(\alpha) \approx \alpha$; $\tan(\alpha) \approx \alpha$; $\cos(\alpha) \approx 1-\alpha^2/2$,

donde los ángulos vienen expresados en unidades naturales (radianes). Si el ángulo α viniera expresado en grados sexagesimales (α<5.73°), para calcular su seno o su tangente, utlizamos la marca ρ^0 de la escala C, que indica el factor de conversión de grados a radianes. Hacemos coincidir ρ^0 en la escala C con el valor α (en grados) en la escala D. El índice 10 de la escala C marcará sobre la escala D el ángulo α en centésimas de radián (y, por tanto, los valores aproximados de $\sin(\alpha)/100$ y de $\tan(\alpha)/100$). Si el ángulo vienera dado en minutos sexagesimales, hacemos coincidir la marca ρ' de la escala C con el valor α (en minutos) en la escala D. El índice 10 de la escala C marcará sobre la escala D el ángulo α en diezmilésimas de radián (y los valores $\sin(\alpha)/10^4 \approx \tan(\alpha)/10^4$). Si el ángulo vienese dado en segundos sexagesimales, hacemos coincidir la marca ρ'' de la escala C con el valor α (en segundos) en la escala D. El índice 10 de la escala C marcará sobre la escala D el ángulo en millonésimas de radián (y, por tanto, el valor de su seno y su tangente dividido por 10^6).

Apéndice

La regla Hemmi 153, con solo 18 escalas, es idéntica en cuanto a distribución de escalas a la Post 1641. La función de Gudermann está disponible, además de en estas reglas, en las Flying Fish 1098 y Shanghai 1018.

La regla Hemmi 153 comparte características y algunas escalas poco usuales (P, Q, Q', θ y R_θ) con las reglas Relay 157 y equivalentes (Lafayette F-686, Ricoh 157, etcétera). Se puede encontrar un documento sobre las particularidades de estas últimas reglas en [1]. No obstante, algunas escalas como la T varían entre la Hemmi 153 y la Relay 157 al estar calibradas para diferentes escalas. La regla Hemmi 153 tiene 18 escalas frente a las 27 de la potente Relay 157.

Hay manuales disponibles para la regla Hemmi 153 [2-3], así como artículos [4].

Bibiografía

[1] Ángel Carrasco. Modelo F 686 Vectorlog. 2018.
Accesible en: https://www.reglasdecalculo.com/manuales.html

[2] Instructions for Hemmi "Universal" Bamboo Slide Rule. For Model 153 Electrical Engineer's Duplex Slide Rule. Hemmi Bamboo Slide Rule Mfg. Company, Ltd . 1934.
Accesible en: https://www.sliderulemuseum.com/SR_Library_Japan.htm

[3] How to Use the Special Scales Hemmi 153 Slide Rule. For Model 153 Electrical Engineer's Duplex Slide Rule. Hemmi Bamboo Slide Rule Mfg. Company, Ltd.
Accesible en: https://www.sliderulemuseum.com/SR_Library_Japan.htm

[4] Brian Borchers and Noël H. Cotter, "The Sun Hemmi System of Trigonometric and Hyperbolic Scales," Journal of the Oughtred Society 9, no. 2 (2000): 28–31
Accesible en: https://osgalleries.org/journal/displayarticle.cgi?match=9.2/V9.2P28.pdf

[5] Hisashi Okura, "Hyperbolic Scale Rule" (U.S. Patent 2,079,464 issued May 4, 1937).